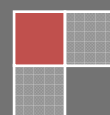


2015

Analyse Maths I

TD N°01 | EG1

Cours Assuré par : _____





 Université Moulay Ismail
 Faculté des Sciences Juridiques
 Economiques et Sociales - Meknes
 Sciences Economiques et Gestion
 Semestre S1
 Année Universitaire 2015 / 2016
TD N° 1 d'Analyse Mathématique
Fonctions numériques

Exercice 1. Après avoir déterminé les domaines de définition des fonctions suivantes, déterminer les limites ci-dessous; si elles existent;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Laquelle de ces affirmations est fausse ?

☐ $D_f = \mathbb{R}$ ☐ f est impaire ☐ C_f admet une asymptote verticale
☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ☐ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Exercice 3. Etudier les asymptotes des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

- $f(x) = -xe^{-x} + x + 2$
- $g(x) = \begin{cases} (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & \text{pour } x \neq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

Exercice 4. Etudier la continuité de la fonction s définie par les relations suivantes :

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t - 1 + e^{-t} & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ t - 3 + e^{-t}(1 + 2e) & \text{pour } 1 \leq t < 2 \\ e^{-t}(1 + 2e - e^2) & \text{pour } 2 \leq t \end{cases}$$

Exercice 5. On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + 1 - \sqrt{x}$ définie sur $]0, +\infty[$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- En déduire que l'équation $\frac{1}{x} + 1 = \sqrt{x}$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$.
- Calculer $f(2)$ et $f(3)$ et justifier que $2 < \alpha < 3$.

Exercice 1:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n} - \sqrt{3-n}}{n}$$

DP: $\{n \in \mathbb{R} / n > 0 \text{ et } 3-n > 0 \text{ et } 3-n > 0\}$
 $\{n \in \mathbb{R} / n > 0 \text{ et } n < 3 \text{ et } n < 3\}$

DP: $[-3, 0] \cup]0, 3\}$

Soit $n \in \text{DP}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{\sqrt{3n} - \sqrt{3-n}}{n} &= \frac{(\sqrt{3n} - \sqrt{3-n})(\sqrt{3n} + \sqrt{3-n})}{n(\sqrt{3n} + \sqrt{3-n})} \\ &= \frac{(3n - (3-n))}{n(\sqrt{3n} + \sqrt{3-n})} \end{aligned}$$

$$= \frac{2n}{n(\sqrt{3n} + \sqrt{3-n})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3n} + \sqrt{3-n}}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n} - \sqrt{3-n}}{n} = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n-5}} = n$$

DP: $\{n \in \mathbb{R} / \frac{n^2}{n-5} > 0 \text{ et } n-5 > 0\}$

DP: $]-\infty, 0] \cup]5, +\infty[$

$$\frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n-5}} = n$$

$$= \frac{(\sqrt{n^2} - n)(\sqrt{n^2} + n)}{n(\sqrt{n^2} + n)}$$

$$= \frac{n^2 - n^2}{n(\sqrt{n^2} + n)} = 0$$

$$= \frac{n^2 - n^2}{n(\sqrt{n^2} + n)}$$

$$= \frac{n^2 - n^2}{n(\sqrt{n^2} + n)}$$

$$= \frac{n}{n(\sqrt{n^2} + n)} = \frac{1}{\sqrt{n^2} + n}$$

	0	5
n^2	-	+
$n-5$	-	+
$\frac{n^2}{n-5}$	+	-

On sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n} - n \right) = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n$

On a $n^n = \exp(\ln(n^n))$
 $= \exp(n \ln n)$
 $= e^{n \ln n}$

DP = $\{n \in \mathbb{R} / \ln(n) \in \mathbb{R}\}$

DP = $]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

Limites usuelles :

• $\forall n \in \mathbb{R}, n > 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n} = 0$

• $\forall n \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^n} = +\infty$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n = 1$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{n}) - \sqrt{n}}{n}$

DP = $\{n \in \mathbb{R} / n \neq 0 \text{ et } n \geq 0\}$

DP = $]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

On pose $f(n) = \frac{\ln(1 + \sqrt{n}) - \sqrt{n}}{n}$

donc $f(n)$ est le taux d'accroissement de la

fonction $g(t) = \ln(1 + \sqrt{t}) + \sqrt{t}$ en 0

$f(n) = \frac{g(n) - g(0)}{n - 0}$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{g(n) - g(0)}{n} = g'(0)$$

$$g(n) = \ln(1 + \sqrt{n}) - \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} g'(n) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{1 + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}(1 + \sqrt{n})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\frac{-\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}} \right) \\ &= -\frac{1}{2(1 + \sqrt{n})} \end{aligned}$$

$$\text{et } g'(0) = -\frac{1}{2}$$

donc $\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \sqrt{n}) - \sqrt{n}}{n} = -\frac{1}{2}$

$$5) \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 3n + 2}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{n \in \mathbb{R} / n^2 - 3n + 2 \neq 0\} \\ &= \{n \in \mathbb{R} / n \neq 2 \text{ et } n \neq 1\} \end{aligned}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 3n + 2} = \frac{(n-2)(n+2)}{(n-2)(n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 2} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 3n + 2} = \frac{0}{0}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n^2 + 2|n|}{n}$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$= \text{Si } n > 0 \text{ (on a)} \quad \frac{n^2 + 2n}{n}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n^2 + 2|n|}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} n + \frac{2n}{n} = 2$$

• Si $n < 0$ tel $n = -m$
 On a $\lim_{n \rightarrow 0^-} (n-2) = -2$

Conclusion : la fonction $n \mapsto \frac{e^n + 2(n)}{n}$
 n'a pas de limite au 0

Exercice 2:

$$f(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

Fonction hyperbolique

$$\operatorname{sh}(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$$

$$th(n) = \frac{\operatorname{sh}(n)}{\operatorname{ch}(n)} = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$$

• $D_{th} = \mathbb{R}$

• th impaire

• $\lim_{n \rightarrow 0} th(n) = \frac{e^n(1 - e^{-2n})}{e^n(1 + e^{-2n})} = 1$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} th(n) = \frac{e^{-n}(e^{2n} - 1)}{e^{-n}(e^{2n} + 1)} = -1$

• au voisinage de ∞

C_{th} admet une asymptote horizontale la droite $y = 1$

• au voisinage de $-\infty$ C_{th} admet une asymptote horizontale la droite $y = -1$

TD 1 :

Exercice 3

$$1) a) f(x) = -x e^{-x} \quad x \geq 2$$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} \quad x \geq 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \cdot \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \cdot 0 = 0$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} = 0 \quad x \geq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad 0 = 0 \quad x \geq 2$$

donc la droite de quotient $y = 0$ est une asymptote oblique de f à $+\infty$

$$2) g(x) = \begin{cases} (x-2) e^{-\frac{1}{x}} & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= (+\infty - 2) e^0$$

$$= +\infty$$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2) e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 0) = 1$$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{x}} = 2 e^{-\frac{1}{x}} = 2$$

$$= n(e^{-\frac{2}{n}} - 1) + 2e^{-\frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{2}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -2 \times \frac{e^{-\frac{2}{n}} - 1}{-\frac{2}{n}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -1 = 2 = a = b$$

La droite des $y = n$ est une asymptote oblique de c à $+\infty$.

Exercice 4.

c est une fonction définie par parties. Chaque partie est continue dans son intervalle de def, car c est la somme de fonctions continues. donc pour $n \in \{0, 1, 2\}$

$$\text{si } \lim_{t \rightarrow a} s(t) = s(a)$$

$$a = 0$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} s(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$s(0) = 0 - 1 + e^0 = 0$$

donc $s(t)$ est continue en 0

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} s(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} t - 1 + e^t \\ &= 1 - 1 + e^1 \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$s(1) = 1 - 1 + e^1 = e$$

$$= -2 + \frac{1}{e} + 2$$

$$= \frac{1}{e}$$

Alors $s(t)$ est continue en 1

$$a = 2$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 2^-} S(t) &= \lim_{t \rightarrow 2^-} t - 3 - 2^{-t} (t - 2e) \\
 &= 2 - 3 - 2^{-2} (2 - 2e) \\
 &= -1 - 2^{-2} (2 - 2e) \\
 &= -1 - 2^{-1} (1 - e) \\
 &= -1 - \frac{1}{2} + \frac{e}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(2) &= e^{-2} (2 - 2e - e^2) \\
 &= \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e} - 1
 \end{aligned}$$

donc $S(t)$ est continu en 2 donc $S(t)$ est continu en $\mathbb{R}$

Exercice 5

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty - \sqrt{x} \\
 &= +\infty - 0 \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \frac{1}{x} = 0 - \sqrt{x} \\
 &= 0 - +\infty \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \Rightarrow \frac{1}{x} - \sqrt{x} &= 0 \\
 f(x) &= 0 \\
 f(x) &= 0
 \end{aligned}$$

théorème des valeurs intermédiaires si f est continu sur $[a, b]$ $\forall y_0$ entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x_0 tel que $f(x_0) = y_0$.
en plus si f est strictement monotone alors x_0 est unique

* f est continu $\forall a, a \in \mathbb{C}$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \quad f(x) < 0$$

est strictement décroissante

$$\begin{aligned} & \text{soit } x_0 = x \quad y = 0 \quad f(x_0) = 0 \\ & f(x) = 0 - x - x = -x < 0 \\ & = -\frac{1}{4} - x - \sqrt{x} = -\frac{3}{4} < 0 \end{aligned}$$

donc $f(x) < 0 < f(x)$

$$[a, b] = [1, 4]$$

de théorème et

unique $f(x) = 0$

Question de cours

- Q3 - ① vrai ② vrai
③ vrai ④ faux

$f(x) = (x)$ est continu en a
alors que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -1$

+ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ donc f
n'est pas dérivable en a

⑤ vrai

Exercice 6

a. $df = \left[-\frac{1}{\sqrt{x}} \right]$

b. $f(x) = \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$= \frac{x - \sqrt{3 - x^2}}{x + \sqrt{3 - x^2}}$$

$$c. f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3 - x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3 - x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow 3 - x^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{car } \frac{\sqrt{6}}{2} \in \mathcal{D}f$$

d. Si f admet une tangente

verticale d'équation $x = a$

alors l'expression de la dérivée

de f en a est infinie

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$$

$$df = \left[-\frac{1}{\sqrt{x}} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \frac{0}{0} \text{ car } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$$

Exercice 7

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} \\ = (0-2)e^{-\infty} \\ = 0 = f(0)$$

- donc f est continue à droite de 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2)e^{-\frac{1}{x}} \\ = (0-2)e^{-\infty} \\ = +\infty$$

- donc f n'est pas continue à gauche de 0

* dérivabilité

puisque f n'est pas continue à gauche de 0 elle n'est pas dérivable à gauche de 0 et donc en 0 aussi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\text{On pose } y = -\frac{1}{x} \quad \begin{matrix} x \rightarrow 0^+ \\ y \rightarrow -\infty \end{matrix}$$

$$= 0 = \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y \\ = -\lim_{y \rightarrow -\infty} y e^y = 0$$

donc f est dérivable à droite de 0 mais pas à gauche

Q₁

① Vrai. toute fonction périodique monotone est constante
supposons que f est périodique de T et croissante et soient $x < y$ et $x+nT < y$
alors $f(x) \leq f(y) \leq f(x+nT)$
donc $f(x) = f(y)$
donc f est constante

Rq : les 3 autres questions sont fausses si f est monotone sur une seule période continue
ex. $\ln(x) \uparrow$ sur $]0, +\infty[$

② Vrai car la fonction constante et croissante et décroissante

③ Vrai

④ Vrai tout fonction constante est bornée car $a \leq f(x) \leq a$

Q₂

1. Sans exp

$$f(x) = x \ln(x) \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

f n'est pas continue à D

2. Vrai

3. Sans exemple

$$\text{Preuve : } x \text{ alors } f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

lim $f(x)$ n'existe pas

4. Sans voir (par 1)